

TD : Fractions (Chapitre 1)

MAJ : 22 juillet 2026

Exercice 1.

1. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}; \frac{7}{24}; \frac{11}{12}$$

3 6 7 4 2 5

dénominateur commun → 24

Astuce : Cherchez un dénominateur commun qui soit déjà présent parmi les fractions données.

2. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$-\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{14}$$

mettre sur 12

mettre sur 14

↳ compare avec 12 et 14

Astuce : Attention à l'ordre lorsque les nombres sont négatifs : comparez d'abord leurs valeurs absolues.

3. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$\frac{6}{7}; \frac{12}{15}; \frac{2}{3}; \frac{18}{19}; \frac{15}{17}$$

6 2 2 5 3

Astuce : Simplifiez d'abord les fractions qui peuvent l'être. Si le dénominateur commun semble trop grand pour être pratique, une autre méthode de comparaison existe.

Exercice 2. On considère la fonction réelle $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

1. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$f\left(-\frac{1}{3}\right), \quad f\left(\frac{3}{29}\right), \quad f\left(-\frac{13}{5}\right)$$

Astuce : Ne vous fiez pas à l'ordre des arguments : une fonction du second degré n'est pas monotone sur tout $\mathbb{R}$. Repérez d'abord le sommet de la parabole pour savoir sur quels intervalles f croît ou décroît.

Exercice 3.

1. Calculer et présenter sous forme d'une fraction simplifiée :

$$\frac{5}{8} \quad a = \frac{-1}{8} + \frac{3}{4} \quad b = \frac{-1}{12} + \frac{5}{16} \quad c = \frac{-1}{8} + \frac{5}{4!}$$

$$d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \quad e = \frac{3}{5!} - \frac{2}{4!} \quad f = \frac{1}{6!} + \frac{1}{5!}$$

$$g = \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \quad h = \frac{7}{2^3 3^2 5^6} - \frac{5}{2 \times 3^3 \times 5^4}$$

$$i = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

Astuce : Réduisez chaque terme au même dénominateur en gardant les factorielles sous forme de produits (ne les calculez pas trop vite) : cela révèle souvent des simplifications. Pour i, g , commencez par la fraction la plus imbriquée.

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme $x + y\sqrt{3}$ où x et y sont des rationnels :

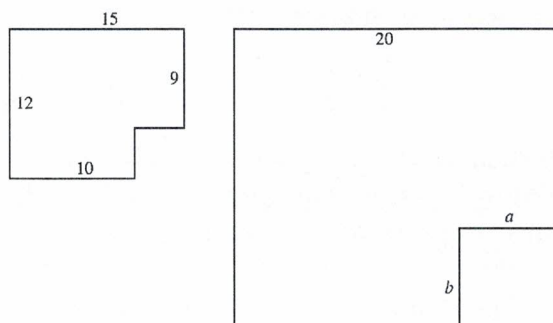
$$a = 2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \quad b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}} \quad c = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}}}$$

Rappel : $n!$ désigne factorielle n , défini par $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$.

Astuce : Rationalisez le dénominateur en partant de la fraction la *plus basse* et remontez étage par étage.

Exercice 4. La deuxième figure est obtenue par agrandissement proportionnel à la première.

1. Trouver a et b .



Exercice 5. On considère la fonction réelle $f : x \mapsto \frac{x-1}{2-x}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{2}{3})$ et $f(-\frac{7}{9})$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Astuce : Écrire $f(x)$ autrement, par exemple en faisant apparaître une constante plus une fraction dont le numérateur ne dépend plus de x .

4. On note $y = \frac{x-1}{2-x}$. Exprimer x en fonction de y .

Astuce : Traitez l'égalité comme une équation d'inconnue x où y est un paramètre fixé.

5. Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{2}{5}$.

Exercice 6.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.

Astuce : Gardez les résultats sous forme de fractions simplifiées à chaque étape.

Exercice 7. Dans les formules suivantes de physique, donner sous forme d'une fraction (2 étapes...) :

1. m dans $E = \frac{1}{2}mv^2$.

3. f' et n dans $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'}$.

2. R_2 dans $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

4. δ dans $P = \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{a}{\delta}\right)$.

Astuce : Isolez d'abord le terme contenant l'inconnue d'un côté de l'égalité, puis inversez la fraction obtenue. Attention à bien traiter les inconnues qui sont elles-mêmes au dénominateur d'un dénominateur.

Exercice 8.

1. Mettre les expressions suivantes sous la forme d'un seul quotient :

$$a = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} \quad b = \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2}$$

$$c = \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}} \quad d = \frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1} \quad e = \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}}$$

Astuce : Repérez à chaque fois le dénominateur commun le plus économe (pas nécessairement le produit de tous les dénominateurs).

2. On pose $y = x - \frac{1}{x}$. Exprimer au moyen de y seulement les expressions suivantes :

$$a = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad b = x^3 - \frac{1}{x^3} \quad c = x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Astuce : Développez $y^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ pour faire apparaître $x^2 + \frac{1}{x^2}$ à une constante près, puis réutilisez ce type d'identité pour monter en puissance.

Exercice 9. On considère $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ avec x variable réelle.

1. Calculer $h'(x)$ sans se soucier du domaine de dérivabilité.

2. Donner une expression simple de $f(x) = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}}$. On sera amené à distinguer deux cas.

Pour rappel : $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.

Astuce : Une racine carrée fera apparaître une valeur absolue : c'est là que naissent les deux cas à distinguer.

Exercice 10.

On considère la suite (dite « harmonique ») définie par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, c'est-à-dire

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. Montrer que cette suite est croissante.

Astuce : Comparez directement H_{n+1} et H_n : leur différence a un signe évident.

3. Pour les forts en maths, démontrer que le terme général H_n s'écrit toujours, après simplification, sous la forme du rapport d'un nombre impair et d'un nombre pair. On pourra utiliser un raisonnement dit « par récurrence forte ».

Méthode 1 *Récurrence forte*

Le principe de récurrence forte s'énonce comme suit.

Soit P_n une propriété dépendant de l'entier naturel n . Supposons que :

- *il existe un entier n_0 tel que P_{n_0} est vraie (initialisation) ;*
- *pour tout entier $n \geq n_0$, si $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \dots, P_n$ sont vraies, alors P_{n+1} est vraie (hérédité).*

Donc, P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Astuce : Réfléchissez à ce qui se passe pour la parité du numérateur et du dénominateur lorsqu'on ajoute $\frac{1}{n+1}$ à une fraction déjà de la forme impair/pair.